Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Clasa a IX-a

Model subiect

Etapa I / Etapa a II-a

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns.

1. Partea întreagă a numărului $a = \dfrac{12}{\sqrt{7}-1}$ este egală cu:

A. 6 **B. 7** **C.** 9 **D.** 10 **E.** 11

2. Suma soluțiilor ecuației $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \dfrac{x+1}{2}$ este egală cu:

A. 12 **B.** 18 **C. 21** **D.** 27 **E.** 32

3. Se consideră predicatul $p(x,y): "2x^2+5y=1",\ x,y \in \mathbb{R}$. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

A. $(\exists x)p(x,1)$ **B.** $(\forall y)p(\sqrt{2},y)$ **C.** $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ **D.** $(\forall y)(\exists x)p(x,y)$ **E.** $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$

4. Numărul numerelor de patru cifre cu suma primelor două cifre egală cu 4 este egal cu:

A. 40 **B.** 300 **C.** 360 **D.**400 **E.**1600

5. Dacă $a \in (0,1)$ și $x = a + \dfrac{1}{a}$, atunci valoarea expresiei $E(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ este egală cu:

A. $\dfrac{1}{2a}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** a **D.** $\dfrac{a^2}{2}$ **E.** a^2

6. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică pentru care $a_2+a_6+a_{10}+a_{14}=80$, atunci numărul $S_{15}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{15}$ este egal cu:

A. 32 **B.** 60 **C.** 120 **D.**225 **E.**300

7. Dacă numerele $x-1,\ y,\ x+y,\ 5x-y$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci produsul xy este egal cu:

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8 **E.** 10

8. Suma elementelor mulțimii $P = \left\{ n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{2n^2+n+3}{2n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ este egală cu:

A. – 4 **B.** – 3 **C.** – 2 **D.** 0 **E.** 1

9. Numărul elementelor mulțimii $M=\left\{k\in\mathbb{Z}\;\middle|\;1\le\left[\frac{3k}{4}\right]<2021\right\}$ este egal cu:

A. 2692 **B.** 2693 **C.** 2691 **D.** 2020 **E.** 2021

10. Mulțimea $\{x>0\,|\,1+[x]=[x^2]\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, este inclusă în intervalul:

A. $(-1,0)$ **B.** $[0,1]$ **C.** $(1,\sqrt{3})$ **D.** $(\sqrt{3},2)$ **E.** $(1,\sqrt{2}]$

11. Dacă vectorii $\vec{u}=(m+1)\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=2\cdot\vec{i}+(m-1)\cdot\vec{j}$ sunt coliniari, atunci numărul pozitiv m este egal cu:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3 **E.** $\frac{7}{2}$

12. Dacă E și F sunt mijloacele diagonalelor *(AC)*, respectiv *(BD)* ale unui patrulater convex *ABCD* și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=p\cdot\overrightarrow{EF}$, atunci numărul real p este egal cu:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 2 **E.** 3

13. Numărul progresiilor aritmetice de numere naturale, cu primul termen 1 și care conțin numărul 2021, este egal cu:

A. 16 **B.** 8 **C.** 13 D. **10** **E.** 12

14. Dacă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ este o funcție cu proprietatea că $f\left(x^3+f(y)\right)=x\cdot f^2(x)+y,\ \forall x,y\in\mathbb{N}$, atunci numărul $f(2021)$ este egal cu:

A. 2020 **B.** 2021 **C.** 2022 **D.** 0 **E.** 1

15. Dacă numerele reale x și y verifică egalitatea $x^2+y^2-2x+12y+33=0$, stabiliți care dintre următoarele relații este adevărată:

A. $x=y$ **B.** $x<y$ **C.** $x>y$ **D.** $2y>x$ **E.** $2x<y$.

16. Suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N},1\le n\le 100\,|\,2^n-1 \text{ se divide cu } 7\}$ este egală cu:

A. 1683 **B.** 1710 **C.** 1671 **D.** 1723 **E.** 1696

17. Numărul maxim de numere naturale care se pot alege din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$ astfel încât suma oricăror două numere dintre cele alese să se dividă cu 6 este egal cu:

A. 15 **B.** 16 **C.** 17 **D.** 18 **E.** 20

18. Se consideră un triunghi *ABC* în care *G* este central de greutate, iar *N* este mijlocul segmentului *(AG)*. Numărul rațional r pentru care $\overrightarrow{AP}=r\cdot\overrightarrow{PC}$ și punctele *B, N, P* sunt coliniare este egal cu:

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{16}$ **D.** $\frac{3}{10}$ **E.** $\frac{5}{16}$

19. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ și $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}=\sqrt{8}$, atunci valoarea minimă a sumei $s=a^2+b^2$ este egală cu:

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** 2 **E.** $\frac{3}{5}$

20. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Dacă T este intersecția dreptelor DC și BE, atunci numărul real $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\alpha \cdot \overrightarrow{TA}$, este egal cu:

A. -2 **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** -1 **D.** $-\frac{2}{3}$ **E.** $-\frac{1}{2}$

Problemele **21-24** se referă la următorul enunț:

În triunghiul ABC se notează cu M, N, P punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Se notează cu a, b, c lungimile laturilor și cu p semiperimetrul triunghiului.

21. Exprimat în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, vectorul $\overrightarrow{AM}$ este egal cu:

A. $\frac{p-c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{a}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\frac{c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{b}{a}\overrightarrow{AC}$ **C.** $\frac{p-a}{b}\overrightarrow{AB}+\frac{p-a}{c}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{p-b}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{p-c}{a}\overrightarrow{AC}$ **E.** $\frac{p-a}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{p-a}{b}\overrightarrow{AC}$

22. Vectorul $\vec{u}=a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{BN}+c\overrightarrow{CP}$ este egal cu:

A. $\frac{1}{a}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\frac{p}{a}\overrightarrow{BC}+\frac{p}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{p}{c}\overrightarrow{AB}$ **C.** $\frac{a}{p}\overrightarrow{BC}+\frac{b}{p}\overrightarrow{CA}+\frac{c}{p}\overrightarrow{AB}$

D. $\frac{b+c}{a}\overrightarrow{BC}+\frac{c+a}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{a+b}{c}\overrightarrow{AB}$ **E.** $\vec{0}$

23. Dacă $a \le b \le c$, o condiție necesară și suficientă pentru ca $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ este:

A. $a+b=2c$ **B.** $a=b=c$ **C.** $a+b=3c$ **D.** $(a<b)\wedge(b=c)$ **E.** $(a=b)\wedge(b<c)$

24. Punctul T din planul triunghiului ABC verifică egalitatea $a\overrightarrow{TM}+b\overrightarrow{TN}+c\overrightarrow{TP}=\vec{0}$ dacă și numai dacă T este:

A. centrul cercului înscris în ΔABC **B.** ortocentrul ΔABC **C.** centrul cercului circumscris ΔABC

D. centrul de greutate al ΔABC **E.** alt răspuns